

Estudos da Mecânica Ocular

I - Sistemas de Definição das Rotações Oculares (*)

Harley E. A. Bicas **

O estudo dos movimentos oculares, embora sua extensa aplicabilidade na rotina oftalmológica, carece ainda de compreensão em vários pontos, a começar de suas bases. Decorrentemente, mesmo abordagens "simples" como descrições pictóricas dos movimentos oculares, ou análises matemáticas, implicam em problemas conceituais, nem sempre devidamente considerados, o que dificulta a compreensão e comparação de diferentes publicações. Em outras palavras, qualquer análise de rotações oculares, ou até referências comuns a movimentos a posições terciárias correspondem necessariamente a um sistema de definição dos deslocamentos. Assim, a localização de um ponto "20° em adução e 20° acima (do plano horizontal)" não tem significado geométrico preciso, ao contrário do que se poderia inicialmente pensar.

De fato, rotações são definidas em torno de eixos e no caso do olho estes tanto podem ser orbitários (fixos) ou oculares (móveis). Dependendo portanto do sistema escolhido, um ponto no espaço (o de fixação, por exemplo) pode ser caracterizado de várias formas.

EIXOS ORBITÁRIOS E OCULARES

Qualquer rotação do olho pode ser analisada em três componentes, ou seja, em torno de eixos referenciais ortogonais: um horizontal transversal (ou látero-medial), um horizontal longitudinal (ou ântero-posterior) e um vertical, sendo eles orbitários, fixos (respectivamente X, Y, Z) ou oculares, móveis (respectivamente X_o , Y_o , Z_o). Rotações horizontais (h) serão medidas em torno de um eixo vertical (Z ou Z_o), as verticais (v) em torno de um eixo látero-medial (X ou X_o) e as torcionais (t) em torno de um eixo ântero-posterior (Y ou Y_o).

Uma descrição pictórica dos diferentes modos de definir as rotações oculares é apresentada para ângulos medidos em torno de eixos orbitários (fig. 1 a, b, c) e eixos oculares (fig. 2 a, b, c).

ORDEM DAS ROTAÇÕES

Suponhamos que duas rotações sucessivas de 90° sejam feitas: uma h, em torno de Z_o e outra v, em torno de X_o (Figura 3).

Assim, dependendo da ordem em que elas são consideradas, o resultado final (fig. 3 c e c') será completamente diferente. Na verdade, o olho não segue um compromisso

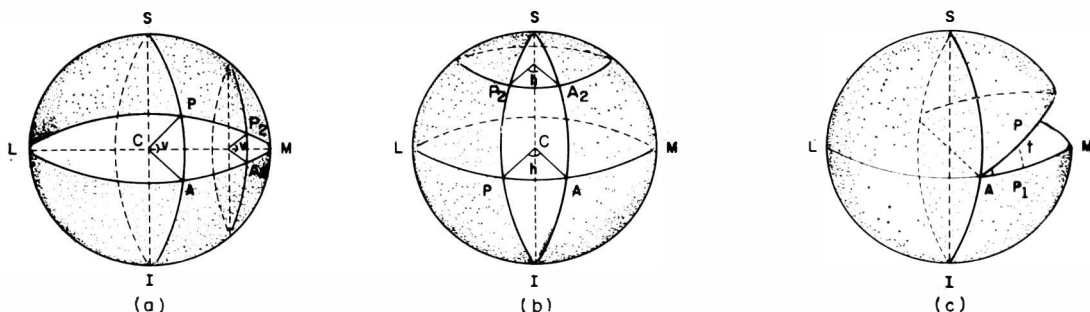


Fig. 1 — Rotações oculares e medições angulares definidas em torno de eixos orbitários, fixos: a) verticais (v), em torno do eixo X (\equiv LM); b) horizontais (h), em torno do eixo Z (\equiv SI); c) torcionais (t) em torno do eixo Y (ântero-posterior).

* Desenvolvido com auxílios da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (São Paulo, Brasil) e da Smith-Kettlewell Eye Research Foundation (San Francisco, California, U.S.A.).

** Professor Adjunto, Departamento de Oftalmologia e Otorrinolaringologia da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

14.100 — Ribeirão Preto — SP. — Brasil.

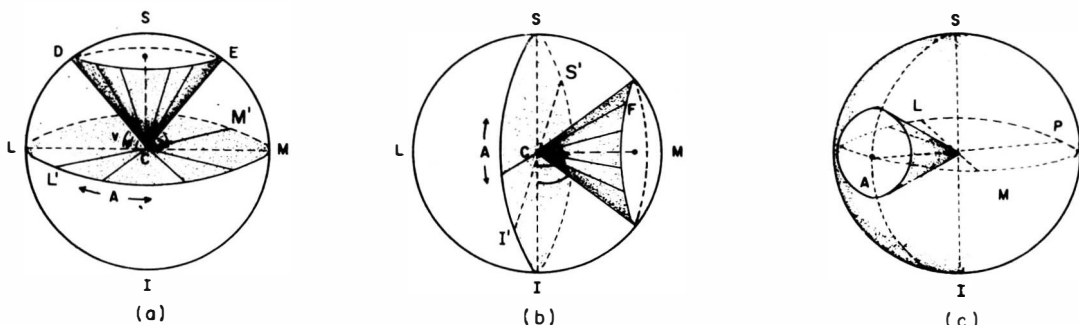


Fig. 2 — Rotações oculares e medições angulares definidas em torno de eixos oculares, móveis: a) verticais (v), em torno do eixo X_0 ($= LM \dots L'M'$) (note-se que essa figura pode ser entendida também da 1 b, com ângulos v formados por $P_2CP = A_2CA$); b) horizontais (h), em torno do eixo Z_0 ($= SI \dots S'I'$) (esta figura pode também ser entendida em 1 a, com ângulos h formados por $ACA_2 = PCP_2$); c) torcionais, em torno do eixo Y_0 (antero-posterior, AP).

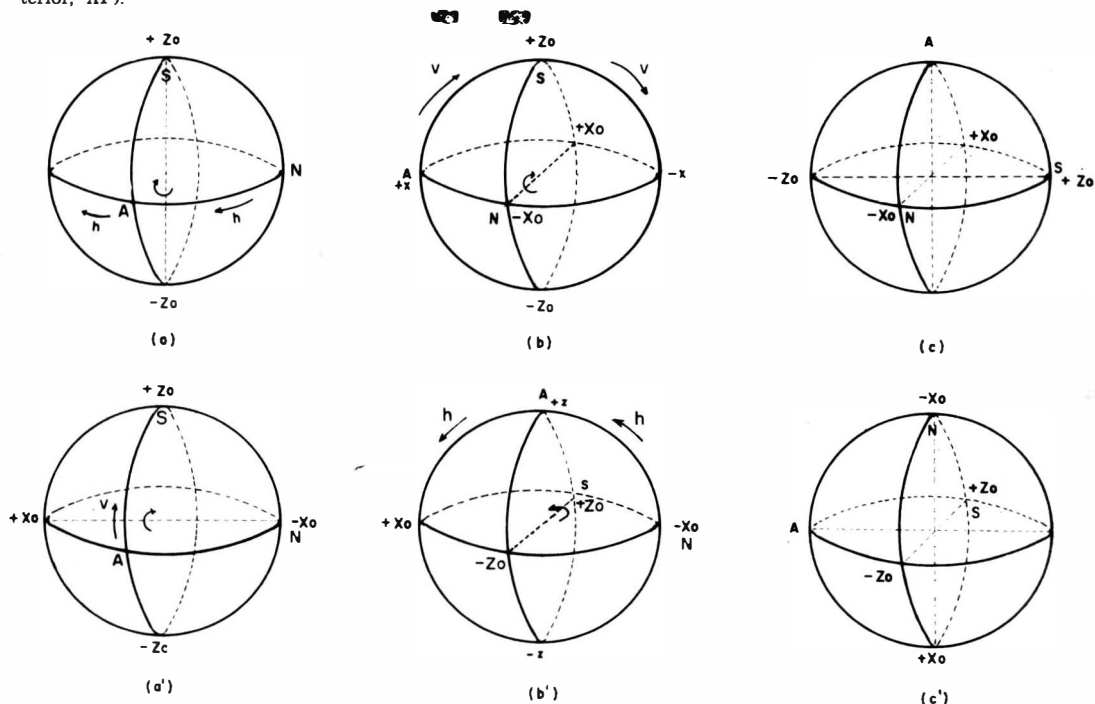


Fig. 3 — Composição de rotações oculares: de uma posição inicial (a) ocorre primeiramente uma rotação h , em torno de Z_0 , conduzindo o olho a uma posição intermediária (b) e desta a rotação v em torno do eixo X_0 leva-o à posição final (c). Partindo-se da mesma posição inicial, mas começando-se com a rotação v (a') chega-se à posição intermediária (b') da qual agora a rotação h leva o olho à situação final (c'). Note-se que as posições dos polos anterior (A), nasal (N) e superior (S) são inteiramente distintas em c e c', apesar das rotações h e v terem sido feitas a partir da mesma posição inicial ($a = a'$) e definidas em torno dos mesmos eixos oculares móveis (respectivamente Z_0 e X_0).

pré-estabelecido na ordem das rotações e elas podem ser combinadas cronologicamente vindo primeiro h e depois v , ou vice-versa. Qual pois o significado de uma rotação em que $h = 90^\circ$ e $v = 90^\circ$?

Realmente não é a ordem cronológica das rotações (primeiro h depois v , ou vice-versa) que determina a posição final de A,

conforme sugere a figura 3, mas a forma em que as rotações são definidas. No primeiro caso, o mesmo resultado pode ser obtido, se h for definida em torno de um eixo orbitário (fixo) e no segundo se v também for definida em torno de um eixo orbitário (fixo), independentemente da ordem cronológica em que as rotações são feitas (fig. 4).

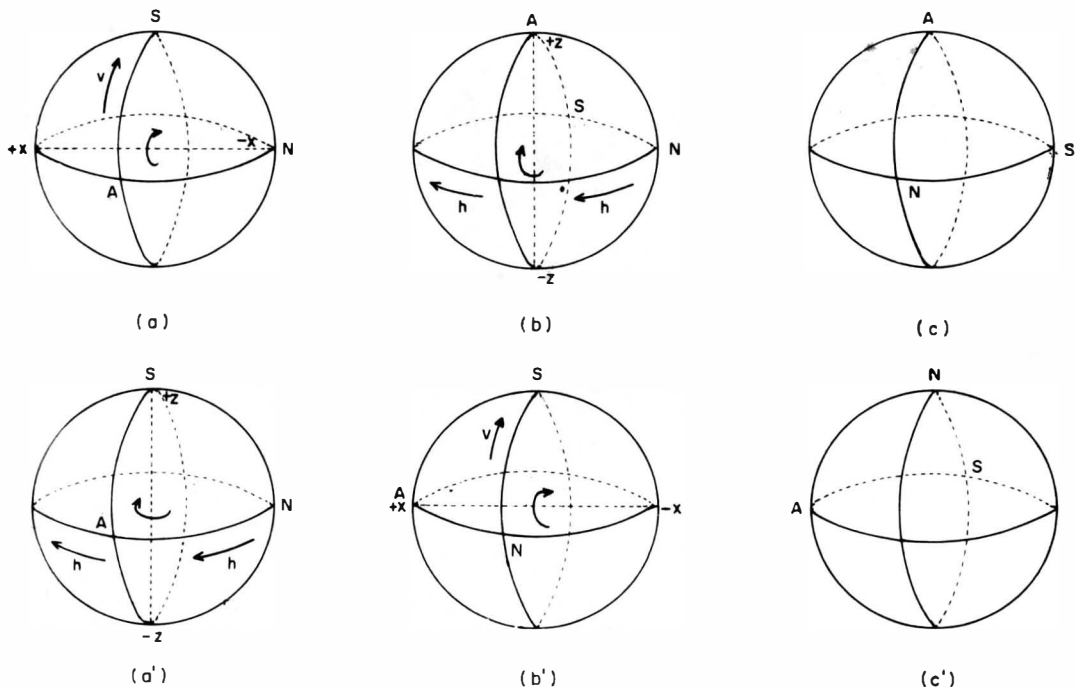


Fig. 4 — Composição de rotações oculares: da posição inicial (a') ocorre primeiramente uma rotação h em torno de Z, conduzindo o olho a uma posição intermediária (b') e desta a rotação v em torno do eixo X leva-o à posição final (c'). Note-se que a sequência posicional corresponde, na figura anterior, a a, b e c'. Partindo-se da mesma posição inicial, mas começando-se com a rotação v (a), chega-se à posição intermediária (b) da qual agora a rotação h , definida em torno do eixo Z, leva o olho à situação final (c). A sequência posicional corresponde na figura anterior a a', b', c. Aqui, também, as posições dos polos anterior (A), nasal (N) e superior (S) são inteiramente distintas em c e c', apesar das rotações h e v terem sido feitas a partir da mesma posição inicial (a = a') e definidas em torno dos mesmos eixos fixos (respectivamente Z e X).

Desse modo, agora se pode ver que a partir da posição inicial tanto faz permitir-se a sequência h e v (figuras 3 a, b, c) como a v e h (figuras 4 a, b, c): o resultado final é o mesmo. Entretanto diferente de outro estado final (fig. 3 c', igual a 4 c') que também pode resultar da mesma posição inicial através da sequência de rotações v e h (figuras 3 a', b', c') ou h e v (figuras 4 a', b', c').

São portanto dois sistemas absolutamente distintos de conceituação: um define h em torno de um eixo fixo e v em torno de um eixo móvel; o outro inverte as premissas: v é medido em torno de um eixo fixo e h considerado em torno de um eixo móvel. O primeiro (fig. 3 a, b, c ou fig. 4 a, b, c, eixo fixo para a medida de h e móvel para a de v) é chamado "sistema de Fick". O segundo (fig. 3 a', b', c' ou fig. 4 a', b', c' eixo fixo para a medida de v e móvel para de h) é chamado "sistema de Helmholtz".

Em outras palavras, FICK (1854) definiu os ângulos de rotação como h (longitude) em torno de um eixo Z, fixo (orbitário) e v (latitude) em torno de um eixo X_0 , móvel (ocular). HELMHOLTZ (1910) considerou ro-

tações h (azimute) como ocorrendo em torno de um eixo Z_0 , móvel (ocular) e v (elevação) em torno de um eixo X, fixo (orbitário). A aparente dependência da ordem cronológica das rotações decorre de que na posição inicial os eixos oculares e os orbitários são coincidentes.

Do ponto de vista matemático, a análise das rotações pode ser estabelecida pela multiplicação de matrizes que definem as rotações h , isto é: (M_h) e v , isto é: (M_v) . A relação entre a posição inicial de um ponto (P_i) na superfície do olho e a posição final desse mesmo ponto (P_f) após as rotações h e v será definida:

a) No sistema de Fick por:

$$(M_v) (M_h) (P_i) = (P_f)$$

b) No sistema de Helmholtz por:

$$(M_h) (M_v) (P_i) = (P_f)$$

E como o produto de matrizes não é comutativo, ou seja: $(M_v) (M_h) \neq (M_h) (M_v)$

(M_v), resulta que (P_{t2}) será completamente diferente de (P_{t1}).

Ao se considerar a possibilidade de rotação t em torno do eixo ântero-posterior, verifica-se portanto a existência de seis diferentes alternativas para definir rotações oculares:

$$(M_t) (M_v) (M_h) = (M_1)$$

$$(M_v) (M_t) (M_h) = (M_2)$$

$$(M_t) (M_h) (M_v) = (M_3)$$

$$(M_h) (M_t) (M_v) = (M_4)$$

$$(M_v) (M_h) (M_t) = (M_5)$$

$$(M_h) (M_v) (M_t) = (M_6)$$

onde M_1 é o sistema de Fick e M_3 o de Helmholtz. E se:

$$(M_h) = \begin{bmatrix} \cos h & \sin h & 0 \\ -\sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(M_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{bmatrix}$$

$$(M_t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

resulta,

$$M_1 = \begin{bmatrix} A-B & C+D & E \\ F & G & H \\ I+J & K-L & N \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} A+B & -F & J-I \\ D-C & G & K+L \\ -E & -H & N \end{bmatrix}$$

em que:

$$\begin{aligned} A &= \cos t \cos h \\ B &= \sin t \sin v \sin h \\ C &= \cos t \sin h \\ D &= \sin t \sin v \cos h \\ E &= -\sin t \cos v \\ F &= -\cos v \sin h \\ G &= \cos v \cos h \\ H &= \sin v \\ I &= \sin t \cos h \\ J &= \cos t \sin v \sin h \\ K &= \sin t \sin h \\ L &= \cos t \sin v \cos h \\ N &= \cos t \cos v \end{aligned}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} A & C & P \\ D+F & B+G & Q \\ R+S & T-U & N \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} A & D-F & S-R \\ -C & G-B & U+T \\ -P & -Q & N \end{bmatrix}$$

em que:

$$\begin{aligned} P &= -\sin t \\ Q &= \cos t \sin v \\ R &= \sin t \cos v \cos h \\ S &= \sin v \sin h \\ T &= \sin t \cos v \sin h \\ U &= \sin v \cos h \end{aligned}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} A & V+X & J+E \\ -Y & G & U \\ I & T-Q & B+N \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} A & Y & -I \\ X-V & G & T+Q \\ J-E & -U & N-B \end{bmatrix}$$

em que:

$$\begin{aligned} V &= \cos t \cos v \sin h \\ X &= \sin t \sin v \\ Y &= \sin h \end{aligned}$$

CORRESPONDÊNCIA ESPACIAL DA ROTAÇÃO OCULAR

A localização de qualquer ponto da superfície de uma esfera pode ser projetada a partir do seu centro numa outra superfície, havendo decorrentemente uma relação das coordenadas entre ambas. A relação será exata (as coordenadas de um ponto significando as coordenadas na superfície de projeção) se esta também for uma esfera concêntrica àquela. Nos casos de projeção em uma superfície plana, apenas parte da esfera será representada, ou seja, sua face que fica voltada para a tela.

A relação linear entre os pontos da tela guarda com as relações angulares da esfera uma função tangente (dai o nome de "telas tangentes"). De fato, na figura 5 a distância $A'B'$ (projeção do arco AB) depende da distância entre a tela e a superfície da esfera ($d = A'A$), do raio da esfera ($r = AR$) e da angulação α correspondente ao arco AB ; sendo d e r constantes, pode-se dizer que os arcos dessa esfera são projetados na tela segundo uma "escala tangente".

Note-se que os arcos do equador, de quaisquer meridianos e genericamente de todo "círculo máximo" (ou seja, aquele com diâmetro igual ao do equador) serão repre-

sentados nessa tela por linhas retas. Em contraposição outros círculos, paralelos aos primeiros ou não, mas possuindo diâmetros menores que o do equador ("pequenos círculos") serão representados por segmentos de parábolas (fig. 6).

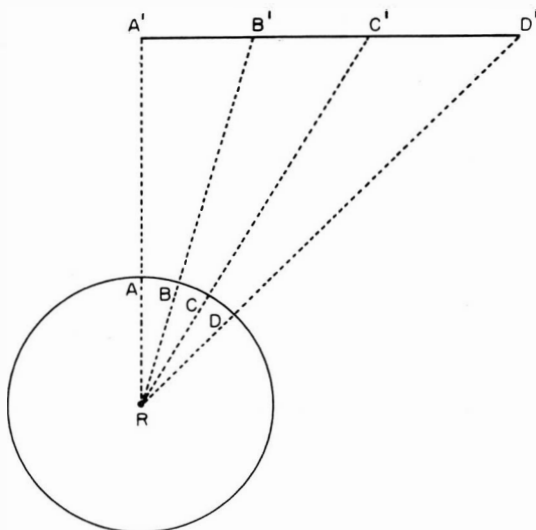


Fig. 5 — Relação entre medidas angulares de uma esfera (olho) e lineares de um plano (tela tangente) note-se que a partir de R, mesmos arcos ($AB = BC = CD$) dão projeções cujos intervalos são crescentes ($A'B' < B'C' < C'D'$) conforme uma escala de tangentes.

Considerando-se então apenas as variações de h ou v , a escala angular desses parâmetros numa tela tangente varia de acordo com o sistema usado para defini-las (figs. 7 e 8).

Então, como paralelas ao equador são caracterizadas por linhas "curvas" na projeção (e.g., arco CDE, figura 6), também rotações horizontais em torno de um eixo vertical fixo (orbitário, fig. 1 b, como no sistema de Fick) serão representadas por essas mesmas linhas (gráficos G_1 e G_3 , figura 7), enquanto rotações horizontais em torno de um eixo vertical móvel (ou ocular, como no sistema de Helmholtz) serão sempre representadas por um "círculo máximo" (fig. 2 b) e consequentemente por linhas retas na projeção (gráficos G_2 e G_4 , fig. 7). O mesmo raciocínio se emprega para as medições e ou rotações verticais: se tomadas em torno de um eixo fixo (ou orbitário, como no sistema de Helmholtz, fig. 1 a) as linhas serão curvas (gráficos G_1 e G_2), enquanto as definidas em torno de um eixo móvel (ou ocular, como no sistema de Fick, fig. 2 a) serão retas (gráficos G_3 e G_4). Em síntese, o sistema de definição adotado por Fick corresponderá ao gráfico G_3 , o de

Helmholtz ao G_2 , um em que h e v se definem em torno de eixos fixos (orbitários) por G_1 e o em torno de eixos móveis (oculares) por G_4 .

Esse tipo de projeção (chamada central ou gnomônica) é entretanto inconveniente no que diz respeito à avaliação da "falsa" torção, ou seja, da inclinação com que a horizontal e a vertical objetivas, na retina, são projetadas no espaço. Para contornar esse problema, é adotado um outro tipo de projeção (chamada ocipital ou estereográfica). A projeção aqui é feita a partir do "polo ocipital", que é o antípoda ao ponto em que a superfície plana de projeção ("tela tangente") tangencia uma esfera imaginária concêntrica ao olho. Em outros termos, se a distância do centro de rotação à tela tangente é k , a distância do polo ocipital ao centro de rotação será também k e portanto do polo ocipital à tela tangente $2k$, na mesma linha (figs. 9 e 10). (Para maiores detalhes veja HELMHOLTZ, 1910).

Nesse caso, arcos de círculos máximos, isto é, meridianos e outras curvas, cujos comprimentos são iguais ao do equador e que passam pelo ponto A (polo anterior) são representadas na projeção plana (estereográfica) por segmentos de linhas retas. Também serão representadas como linhas retas as projeções de curvas chamadas "direction circles" por Helmholtz e que são aquelas contidas em planos passando pelo polo ocipital (fig. 10). Essas linhas fazem com as "horizontais objetivas" (círculos máximos contendo o eixo X) e ou com as "verticais objetivas" (círculos máximos contendo o eixo Z), ângulos correspondentes à "falsa" torção. (Para revisão mais completa desse assunto, veja BOEDER, 1957). De fato, as projeções dessas linhas mostrarão as posições ideais (esperadas) para as pós-imagens horizontais e ou verticais; de onde se pode, através delas, medir uma eventual inclinação "real".

Note-se que arcos de "pequenos círculos" darão segmentos de hipérbolas, assim como arcos de círculos máximos que não passem pelo polo anterior. Um caso especial é o dos círculos centrados no eixo Y, que serão representados por arcos de círculos na projeção estereográfica.

A representação das convenções adotadas para avaliação das medidas de h e v , em torno de eixos móveis e ou fixos para a projeção estereográfica, é feita na figura 11; e a relação com as anteriores (fig. 7, projeção central) é a de que G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 correspondem respectivamente a G_1, G_2, G_3 e G_4 .

Em suma, há vários modos de se relacionar ângulos (deslocamentos, desvios, etc.)

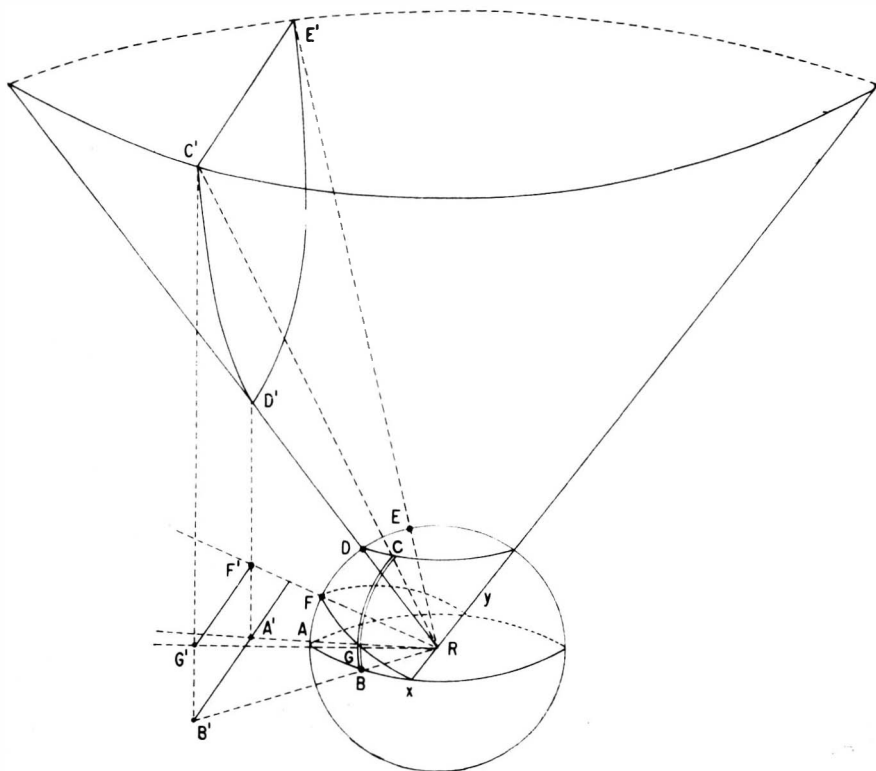


Fig. 6 — Linhas da superfície de uma esfera e suas projeções num plano frontal (a partir do centro da esfera, R). Todo arco de um círculo máximo (isto é, com diâmetro igual ao da esfera) dá como projeção uma linha reta; exemplo: os arcos AB (equatorial), AD e BC (ao longo de meridianos), FG, etc., dão as projeções A'B', A'D', B'C', F'G', etc. Arcos de círculos menores darão segmentos de parábolas; exemplo o CDE (correspondente a um círculo de latitude) dará a curva C'D'E' que é uma seção cônica paralela à geratriz (perpendicular à base, portanto um segmento de parábola) como se vê facilmente da figura.

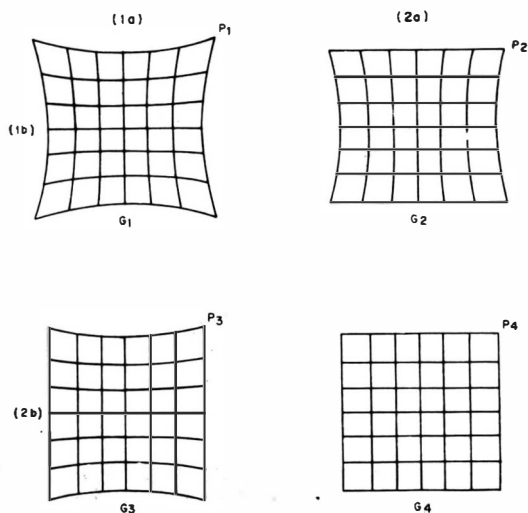


Fig. 7 — Rotações desenvolvidas em torno de eixos móveis (ou oculares) sempre desenvolverão arcos de círculos máximos (figs. 2 a, 2 b), cujas projeções num plano corresponderão portanto a linhas retas (G_4). Rotações desenvolvidas em torno de eixos fixos (ou orbitários) sempre desenvolverão arcos de círculos menores (figs. 1 a, 1 b), cujas projeções num plano tangente serão correspondentes a linhas curvas (G_1). As escalas das rotações horizontais desenvolvidas em torno de um eixo fixo e das verticais em torno de um eixo móvel (sistema de Fick) serão então correspondentes a G_3 , enquanto as escalas das rotações horizontais ocorrendo em torno de um eixo móvel e das verticais em torno de um fixo (sistema de Helmholtz) relacionar-se-ão a G_2 .

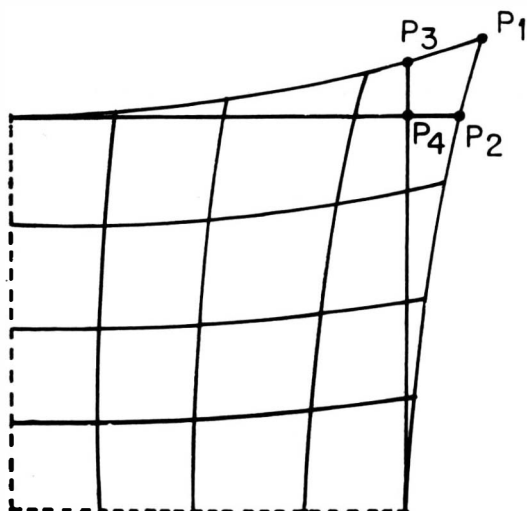


Fig. 8 — Relação das projeções de pontos $P_1 \dots P_4$, todos correspondentes às mesmas coordenadas $h = 30^\circ$, $v = 30^\circ$. Elas são representadas em diferentes pontos do espaço de acordo com o sistema adotado para definição dos parâmetros (cf. figura 7).

numa tela tangente, dependendo da definição que se toma para avaliação dos mesmos (em torno de eixos móveis ou de fixos) e do tipo de projeção (gnomônica ou estereográfica) adotada. Se se tem interesse por medir a

torção, a projeção estereográfica é, sem dúvida, mais aconselhável. Com respeito às medidas dos ângulos, nem o sistema de Fick nem o de Helmholtz são inteiramente satisfatórios (já que a escala para um dos eixos difere da do outro) e assim sobram as convenções "coerentes". Nestas (gráficos G_1 e G_4 na figura 7 e G'_1 e G'_4 na figura 11), iguais valores para h e v sempre corresponderão à mesma direção $p = 45^\circ$. Nos outros sistemas, o valor angular da direção p mudará, mesmo que h e v se mantenham iguais. Por exemplo, no sistema de Fick (ângulos definidos pelas figuras 1 b e 2 a), $p = 45^\circ 26'$ (para $h = v = 10^\circ$), $p = 49^\circ 06'$ (para $h = v = 30^\circ$) e $p = 57^\circ 16'$ (para $h = v = 50^\circ$).

Assim G'_1 e G'_4 (fig. 11) são gráficos originados de convenções "coerentes", com a vantagem de permitir a medida mais fácil da torção ocular. De ambos, G'_4 (segundo a convenção da medida angular de h e v em torno de eixos móveis, oculares (figs. 2 a e 2 b) parece melhor que G'_1 (segundo a convenção da medida de h e v em torno de eixos fixos, figs. 1 a e 1 b) em alguns aspectos: nesse sistema (G'_4) mesmos deslocamentos não só correspondem a mesmos ângulos, como também a mesmos arcos de círculo descrito. Já para a convenção de medidas em torno de eixos fixos, mesmos ângulos se relacionam com diferentes arcos (fig. 1). Além disso, ao se considerar deslocamentos

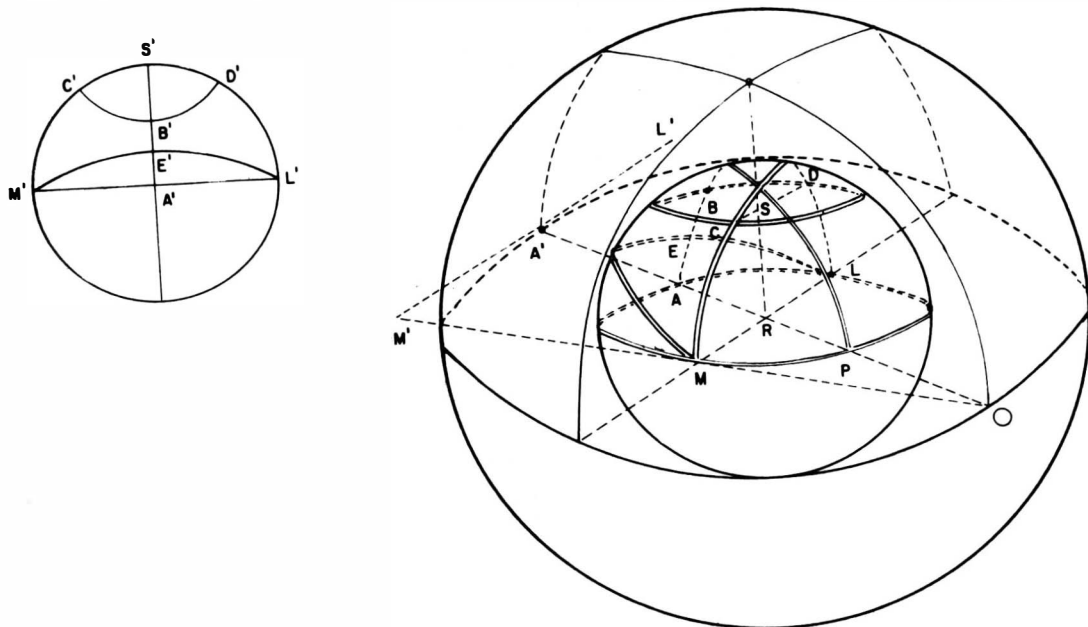


Fig. 9 — Representação de linhas da superfície de uma esfera e suas respectivas projeções num plano, a partir de um ponto O ("polo occipital") cuja distância ao centro da esfera (R) é igual à deste ao plano ($OR = A'R$). (Veja fig. 10).

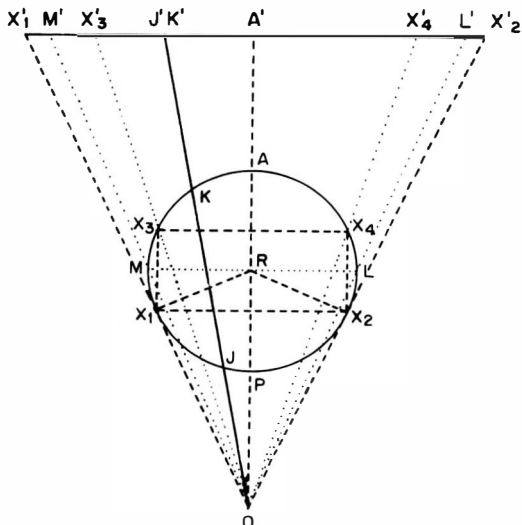


Fig. 10 — Seção horizontal de uma esfera, mostrando relações geométricas numa projeção ocipital: como $OR = RA'$, resulta que $AM' = 2 MR$. Note-se que o comprimento da projeção é inversamente proporcional à distância OR (e $AM' = MR$ apenas para O no infinito). O limite da projeção no plano considerado é dado por um outro que lhe é paralelo, passando pela esfera em X_1X_2 . Um terceiro plano, também paralelo aos dois anteriores e simétrico ao da seção X_1X_2 em relação ao centro da esfera (R), passa pelos pontos X_3 e X_4 . Obviamente, os arcos originados pelas seções em X_1X_2 e em X_3X_4 são idênticos, embora suas projeções sejam diferentes. Linhas retas na projeção serão originadas de seções obliquas da esfera, passando por O (chamadas "direction circles", e.g., seção KJ), além das que passam por A e R (e.g., a AP , vertical a LM , horizontal e outras radiais). Já o arco de círculo máximo passando por L e M numa seção vertical, dará uma projeção circular.

oculares num experimento eletro-oculográfico, por exemplo, os registros são dependentes do arco descrito, interessando então o sistema de medidas em torno de eixos móveis (*). É de se notar, todavia, que a escala G_1' é mais difundida (v.g., telas de Hess).

(*) O eixo eletro-oculográfico depende do posicionamento dos eletrodos e é portanto fixo. Convém, portanto, que o sistema adotado para definir deslocamentos, também seja feito sobre planos (eixos) que girem em torno desse eixo fixo (o que é fácil visualizar nas figs. 1 b ou 2 a para movimentos verticais e 1 a ou 2 b para horizontais), ou seja, em torno de eixos móveis (oculares).

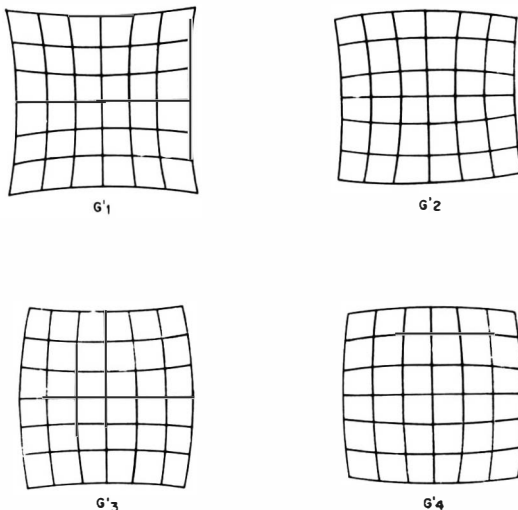


Fig. 11 — Projeção estereográfica de ângulos horizontais considerados em torno de um eixo orbitário, fixo (gráficos G_1' e G_3') ou em torno de eixo ocular, móvel (gráficos G_2' e G_4'); e de ângulos verticais considerados em torno de um eixo orbitário, fixo (gráficos G_1' e G_2'), ou em torno de um eixo ocular, móvel (gráficos G_3' e G_4'). Assim, o sistema de Fick corresponde a G_3' e o de Helmholtz a G_2' .

RESUMO

As várias formas de definição das rotações oculares são apresentadas. A seguir, consideradas projeções planas (a gnomônica e a estereográfica) das coordenadas de deslocamentos horizontais e verticais conforme elas sejam conceituadas em torno de eixos orbitários (fixos) e ou oculares (móveis).

SUMMARY

The several models for defining ocular rotations are presented. Subsequently, some plane (the gnomonic and the stereographic) projections for horizontal and vertical displacements are considered, accordingly they are defined around orbital (fixed) and or ocular (movable) axes.

REFERENCIAS

- BOEDER, P. (1957): An analysis of the general type of unocular rotations. A.M.A. Arch. Ophthalmol., 57: 200-206.
- FICK, A. (1854): Die Bewegungen des menschlichen Augapfels. Zeit. f. Rat. Med. N.F., 4: 101-128.
- HELMHOLTZ, H. von (1910): Handbuch der Physiologischen Optik. In "Helmholtz's Treatise on Physiological Optics" (Transl. 3rd German Edit., J.P.C. Southall, ed.), Vol. III, pp. 37-154. The Optical Society of America, Rochester, N.Y. (1925).